Краткое изложение материалов лекционного курса
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ,
относящихся к задачам **линейного программирования**,
лектор проф. М. М. Потапов

Общая задача линейного программирования:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf, \quad u \in U = \{u \in R^n \mid Au = b,\ Du \leqslant f\}.$$

Каноническая задача линейного программирования:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf, \quad u \in U = \{u \in R^n \mid Au = b,\ u \geqslant 0\}. \tag{1}$$

Любую общую задачу ЛП можно свести к канонической, правда, ценой значительного увеличения размерности. Справедлива

Теорема 1. *В канонических задачах линейного программирования 1) если допустимое множество U непусто, то оно содержит хотя бы одну угловую точку, 2) если нижняя грань функционала J_* конечна, то множество U_* оптимальных решений непусто, 3) если множество U_* оптимальных решений непусто, то оно содержит по крайней мере одну угловую точку множества U.*

Вывод: решать задачу ЛП программирования можно перебором угловых точек (вершин) канонического многогранника U. Одним из целенаправленных способов такого перебора, обеспечивающим монотонное невозрастание функционала $J(u)$, является симплекс-метод. Для его реализации нужна стартовая угловая точка (вершина) канонического многогранника U и правило распознавания угловых точек.

Алгебраический критерий для распознавания угловых точек содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть U – канонический многогранник вида (1), A_j, $j = 1, 2, ..., n$, – столбцы матрицы A и ранг матрицы A равен $r \geqslant 1$. Тогда для того, чтобы точка $v \in U$ была угловой точкой множества U, необходимо и достаточно, чтобы равенство $Au = b$ из определения множества U выполнялось в виде*

$$A_{j_1} v_{j_1} + ... + A_{j_r} v_{j_r} = b\,, \tag{2}$$

причем столбцы A_{j_i}, $i = 1, 2, ..., r$, обязательно являются базисными для матрицы A, а не представленные в (2) координаты точки v обязательно равны нулю.

Найти стартовую угловую точку канонического многогранника U можно методом *искусственного базиса.* Для этого рассматривается следующая вспомогательная задача ЛП в пространстве переменных $z = (x, u) \in R^{m+n}$, где m – количество строк матрицы A :

$$g(z) = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \to \inf, \quad z \in Z = \{z \geqslant 0, \;\; x + Au = b\}. \qquad (3)$$

Без ограничения общности компоненты вектора b предполагаются неотрицательными: $b \geqslant 0$. Тогда по теореме 2 точка $z_0 = (x = b, \, u = 0)$ является *угловой* точкой канонического многогранника Z. Из этой точки z_0 можно запустить симплекс-метод (с антициклином) и он за конечное число шагов найдет решение $z_* = (x_*, \, v_*)$ задачи (3), которое существует в силу теоремы 1, так как $g_* = \inf\limits_{z \in Z} g(z) \geqslant 0$. При этом

$$g_* = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad U \neq \varnothing,$$

а компонента v_* будет *угловой* точкой каконического многогранника U, из которой и запускается симплекс-метод в исходной задаче (1).

На каждом шаге симплекс-метода обрабатывается очередная угловая точка $v \in U$. Этой точке по теореме 2 соответствует *базисный* набор столбцов матрицы A с *базисными* номерами

$$J_b = \{\, j_1, \, j_2, \ldots, j_r\}.$$

Оставшиеся координаты объединяются в набор *свободных* номеров $J_f = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus J_b$. Переменные $u_b = (u_{j_1}, \, u_{j_2}, \ldots, u_{j_r})$ объявляются *базисными*, а остальные $n - r$ переменных u_f – *свободными.* Затем в задаче (1) исключаются базисные переменные и она превращается в *(неканоническую)* задачу ЛП меньшей размерности:

$$j(u_f) = J(v) - \sum_{k \in J_f} \Delta_k \, u_k \to \inf, \quad u_f \geqslant 0, \quad u_b \geqslant 0\,. \qquad (4)$$

Неканоническими в задаче (4) являются ограничения $u_b \geqslant 0$ на исключенные базисные переменные. Далее, выбираются номера свободных переменных, перспективных в плане убывания функционала:

$$J_f^+ = \{\, k \in J_f \mid \; \Delta_k > 0\}.$$

При этом возможны три случая.

I. $J_f^+ = \varnothing$. Это означает, что никакой возможности уменьшить значения функционала уже нет, процесс останавливается, а искомое решение найдено: $v \in U_*, \;\; J_* = J(v)$.

II. $J_f^+ \neq \varnothing$ и $\exists k \in J_f^+$, такой, что на свободную переменную u_k неканонические условия $u_b \geqslant 0$ на самом деле никаких реальных ограничений сверху не накладывают. Тогда процесс останавливется с неутешительным выводом: решения у задачи (1) не существует, а $J_* = -\infty$.

III. В случае, когда $J_f^+ \neq \varnothing$ и $\forall k \in J_f^+$, возможные значения переменной u_k ограничены сверху, среди этих свободных переменных выбирается однаединственная, ей присваивается *максимально возможное* значение, а остальным свободным переменным присваиваются *нулевые* значения. В результате получается очередная *угловая* точка $w \in U$, причем $J(w) \leqslant J(v)$. Описанное здесь действие принято называть *шагом симплекс-метода.* Строгое убывание $J(w) < J(v)$ гарантировано в случае *невырожденной* угловой точки v, все базисные координаты которой *положительны*: $v_j > 0 \ \forall j \in J_b$. Если угловая точка v вырожденна, не исключено "топтание на месте": $J(w) = J(v),\ w = v$ и связанное с этим явлением *зацикливание.* Один из известных способов борьбы с зацикливанием симплекс-метода – *правило Блэнда*, которое упорядочивает выбор номеров свободных переменных, пригодных для одномерных вариаций в случае **III.**

Разумеется, для решения задач ЛП *с неточными данными* нужно подключать дополнительные регуляризирующие процедуры (в лекционном курсе эти проблемы не рассматривались).